جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان الفصل الثاني 2017 – 2016 لمقرر : نظرية الأعداد	لمدة :ساعة ونصف الدرجة : 100

السؤال الأول(30 درجة) :

ليكن $p \geq 5$ عدداً أولياً، والمطلوب:

١) أثبت أن للعدد p إحدى الصيغتين: $q \in Z$, $p = 6q + 5$ or $p = 6q + 1$.

٢) أثبت أن العدد $(p^2 + 2)$ عدد مؤلف (ليس أولياً).

السؤال الثاني (30 درجة) :

١) اكتب القاسم المشترك الأعظم للعددين: 36 ; 60 ، كتركيب خطي لهما.

٢) حل المعادلة: $60x + 36y = 192$ ، وعيّن حلولها الموجبة (في حال وجودها).

السؤال الثالث(40 درجة) :

ليكن n عددا طبيعيا، وليكن $\phi(n)$ تابع أولر ، والمطلوب:

١) إذا كان n فردياً فأثبت أن: $\phi(2n) = \phi(n)$. وإذا كان n زوجياً فأثبت أن: $\phi(2n) = 2\phi(n)$.

٢) أوجد مرتبة العدد 5 بالمقاس 14 وبيّن أنه جذر أولي للعدد 14 وأوجد الجذور الأولية للعدد 14.

٣) إذا كان $d(n, 21) = 1$ فأثبت أن: $n^{12} \equiv 1 \pmod{21}$.

د . ياسين خلوف

السؤال الأول (30)

1) عند تقسيم العدد p على العدد 6 نجد إحدى الحالات الآتية

$(i): p = 6q$; $(ii): p = 6q+1$; $(iii)\ p = 6q+2$; $IV\ p = 6q+3$,
$V\ p = 6q+4$; $VI\ p = 6q+5$ (5)

ونلاحظ أن الحالات الأربعة: $6q$; $6q+2$; $6q+3$; $6q+4$ (5) تجعل p عدداً مؤلفاً (ليس أولياً)، ولذلك نكون أمام إحدى الحالتين فقط:
$p = 6q+1$ or $p = 6q+5$ (5)

2) من أجل $p = 5$ نلاحظ أن $p^2+2 = 27$ (5) وهو عدد مؤلف

إذا كان $p > 5$ ولكونه عدد أولي نكون أمام إحدى الحالتين:

$p = 6q+1 \Rightarrow p^2+2 = 36q^2+12q+1+2 = 3(12q^2+4q+1) = 3t_1$; $t_1 \in Z$ (5)

$p = 6q+5 \Rightarrow p^2+2 = 36q^2+60q+25+2 = 3(12q^2+20q+9) = 3t_2$; $t_2 \in Z$ (5)

وفي الحالتين يكون $3 \| (p^2+2)$ وهذا يجعل العدد p^2+2 عدداً مؤلفاً.

السؤال الثاني (30)

1)

$$\left.\begin{aligned} 60 &= 1.36+24 \\ 36 &= 1.24+\boxed{12} \\ 24 &= 2.12+0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d(60,36) = 12 \ (5)$$

$12 = 36 - 1.24 = 36-(60-1.36) = (-1)60+(2)36$

أي أن: $\boxed{12 = (-1)60+(2)36}$ (5) (α)

2.1) لاحظ أن $d = 12 \mid 192$ ومنه فالمعادلة تقبل حلولاً. ولكن (5) $\frac{192}{12} = 16$

نضرب (α) بـ 16 فنجد

$192 = (-16)(60)+(32)(36)$ (5)

أي أن $x_0 = -16$; $y_0 = 32$ حل خاص للمعادلة، والحل العام يعطى بالشكل:

$x = x_0 + \frac{b}{d}t$; $t \in Z$ $\Rightarrow$ $x = -16+3t$; $t \in Z$
$y = y_0 - \frac{a}{d}t$ $\qquad\qquad$ $y = 32-5t$ (5)

تكون للمعادلة حلول موجبة إذا وجد $t \in Z$ بحيث $x > 0$ و $y > 0$ أي أن:

$-16+3t > 0$ و $32-5t > 0$ (5) $\Rightarrow t > \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ و $t < \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$

أي أن $t = 6$ يحقق الشرطين وعندئذ تكون $\boxed{x = y = 2}$ (5)

السؤال الثالث: (40)

1) إذا كان n فردياً فإنّ $d(2,n)=1$ ولذا φ دالة ضربية نجد أنّ:

$$\varphi(2n)=\varphi(2)\varphi(n)=1\cdot\varphi(n)=\varphi(n)$$

وإذا كان n زوجياً فإنّ $n=2^k.m$ حيث m فردي، وعندئذٍ يكون $d(2^k,m)=1$ لكل $k\geq 1$ ولذا φ دالة ضربية نجد أنّ:

$$\varphi(2n)=\varphi(2\cdot 2^k\cdot m)=\varphi(2^{k+1})\varphi(m)=(2^{k+1}-2^k)\cdot\varphi(m)=2^k(2-1)\varphi(m)=2^k\cdot\varphi(m)\Rightarrow \boxed{\varphi(2n)=2^k\cdot\varphi(m)} \quad :(1)$$

$$\varphi(n)=\varphi(2^k.m)=\varphi(2^k)\varphi(m)=(2^k-2^{k-1})\cdot\varphi(m)=2^k\left(1-\frac{1}{2}\right)\varphi(m)=2^k\cdot\frac{1}{2}\cdot\varphi(m)\Rightarrow \boxed{2\cdot\varphi(n)=2^k\cdot\varphi(m)} \quad :(2)$$

بمقارنة (1) و (2) نجد أنّ

$$\varphi(2n)=2\varphi(n)$$

2) إنّ $\varphi(14)=\varphi(2\cdot 7)=\varphi(2)\varphi(7)=6\Rightarrow\varphi(14)=6$

ومن ثم نبحث عن مرتبة 5 بالقياس 14 بين قواسم العدد 6، وبالتجربة نجد أنّ:

$$(5)^2=25\equiv 11 \pmod{14} \; ; \; (5)^3\equiv 55 \pmod{14}\equiv 13 \pmod{14}$$

وحتى نتأكد $(5)^6\equiv 1 \pmod{14}$ حسب مبرهنة أولر

إذاً $ord_{14}5=6=\varphi(14)$ ولذلك 5 جذر أصلي (أولي) للعدد 14:

ويكون عدد الجذور الأولية للعدد 14 هو: $\varphi(\varphi(14))=\varphi(6)=2$، ومن ثم الجذر الآخر الأصلي للعدد 14 هو 5^t حيث $d(t,6)=1$ أي أنّه $(5)^5\equiv 5^{6-1}\equiv 5^{-1}\equiv 3$ بالقياس 14

أي أنّ $\{3,5\}$ هي الجذور الأولية للعدد 14

3) ما دام $d(n,21)=1$ فحسب أولر

$$n^{\varphi(21)}\equiv 1 \pmod{21}$$

ولكن $\varphi(21)=\varphi(3)\varphi(7)=2\cdot 6=12$ فنستنتج أنّ

$$n^{12}\equiv 1 \pmod{21}.$$

إذا حل الطالب بأية طريقة أخرى صحيحة فتوزع الدرجات بما يتناسب مع هذا السلم